2024年度 物理工学基礎演習 (統計力学第一)
第1回 問題

担当; 水田 郁 (mizuta@qi.t.u-tokyo.ac.jp, 工学部 9 号館 325 号室)
提出日; 5/13 13:00 (前半クラス), 5/7 13:00 (後半クラス)

I 確率論

確率 $1-p,\, p$ で $0, 1$ を取る N 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ に対して、その平均

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{1}$$

を考える。

(1) $n = 0, 1, \ldots, N$ に対して、確率変数 $\bar{X}_N$ が n/N を取る確率 $\mathrm{Prob}[\bar{X}_N = n/N]$ を求めよ。

(2) 確率変数 X の期待値 $\langle X \rangle$ を $\langle X \rangle = \sum_x x\mathrm{Prob}[X = x]$ によって定める。このとき、確率変数 $\bar{X}_N$ について期待値 $\mu = \langle \bar{X}_N \rangle$ と分散 $\sigma^2 = \langle (\bar{X}_N - \mu)^2 \rangle$ を計算せよ。

(3) ε を正の定数とする。任意の離散確率変数 X に対して、

$$\mathrm{Prob}\Big[|X - \langle X \rangle| \geq \epsilon\Big] \leq \left(\frac{\sigma(X)}{\epsilon}\right)^2 \qquad \text{(Chebyshev の不等式)} \tag{2}$$

が成立することを示せ (ただし $\sigma(X)^2$ は X の分散である)。また、この結果を確率変数 $\bar{X}_N$ に適用することで任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}\Big[|\bar{X}_N - \mu| \geq \epsilon\Big] = 0 \qquad \text{(大数の弱法則)} \tag{3}$$

を示せ。

(4) 確率変数 $\bar{X}_N$ を期待値 0, 分散 1 となるように、$x = (\bar{X}_N - \mu)/\sigma$ で規格化された確率変数 x を定める。このとき、$\Delta x \ll 1$ に対して x が区間 $[x, x + \Delta x]$ 内の値を取る確率 $p(x)\Delta x$ が $N \to \infty$ で標準正規分布

$$p(x)\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Delta x \tag{4}$$

となることを示せ。ただし、簡単のため $p = 1/2$ の場合に限定して良い。また、十分大きな自然数 n に対して成立する Stiring の公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \log n! = n\log n - n + o(n) \tag{5}$$

を用いて良い。

II　調和振動子

(1) 古典一次元調和振動子系の Hamiltonian

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{6}$$

に対して Hamilton 方程式を書き下し、初期条件 $(q,p) = (q(0), p(0))$ を満たす解を求めよ。

(2) $\hat{q}, \hat{p}$ を正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす位置演算子, 運動量演算子とする。このとき、

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{q}^2 \tag{7}$$

で与えられる量子一次元調和振動子系の Hamiltonian を、

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \tag{8}$$

で定義される消滅 (生成) 演算子 $\hat{a}$ $(\hat{a}^\dagger)$ を用いて書き下せ。

(3) 数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の固有状態を $|n\rangle$ とおく。固有値 n が非負の整数であることを示し、Hamiltonian $\hat{H}$ の固有値を求めよ。また、規格化因子 c_n を用いて $|n\rangle = c_n (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ で与えられることを示せ。