2025年度 物理工学基礎演習 (統計力学第一)
第1回 問題

担当; 水田 郁 (mizuta@qi.t.u-tokyo.ac.jp, 工学部9号館325号室)
提出日; 5/12 13:00 (前半クラス), 5/8 13:00 (後半クラス)

I 確率論

確率 $1-p, p$ で $0, 1$ を取る N 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ に対して、その平均

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{1}$$

を考える。

(1) $n = 0, 1, \ldots, N$ に対して、確率変数 $\bar{X}_N$ が n/N を取る確率 $\mathrm{Prob}[\bar{X}_N = n/N]$ を求めよ。

(2) 確率変数 X の期待値 $\langle X \rangle$ を $\langle X \rangle = \sum_x x \mathrm{Prob}[X = x]$ によって定める。このとき、確率変数 $\bar{X}_N$ について期待値 $\mu = \langle \bar{X}_N \rangle$ と分散 $\sigma^2 = \langle (\bar{X}_N - \mu)^2 \rangle$ を計算せよ。

(3) $n, N-n, N$ はいずれも十分大きな自然数であるとする。このとき Stirling の公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ を用いて、確率 $\mathrm{Prob}[\bar{X}_N = n/N]$ が

$$\mathrm{Prob}[\bar{X}_N = n/N] \sim \sqrt{\frac{N}{2\pi n(N-n)}} e^{-ND(n/N)} \tag{2}$$

の形に書けることを示し、関数 $D(x)$ を求めよ。

(4) 前問の状況で $\bar{X}_N$ が区間 $[x, x+\Delta x]$ に含まれる確率

$$p(x)\Delta x = \sum_{n=Nx}^{N(x+\Delta x)} \mathrm{Prob}[\bar{X}_N = n/N] \tag{3}$$

を考える。区間幅 Δx が十分小さく x が p に十分近いとき、確率密度関数 $p(x)$ が平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布で近似されることを示せ。

(5) ε を正の定数とする。任意の離散確率変数 X に対して、

$$\mathrm{Prob}\Big[|X - \langle X \rangle| \geq \epsilon\Big] \leq \left(\frac{\sigma(X)}{\epsilon}\right)^2 \qquad \text{(Chebyshev の不等式)} \tag{4}$$

が成立することを示せ (ただし $\sigma(X)^2$ は X の分散である)。また、この結果を確率変数 $\bar{X}_N$ に適用することで任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Prob}\Big[|\bar{X}_N - \mu| \geq \epsilon\Big] = 0 \qquad \text{(大数の弱法則)} \tag{5}$$

を示せ。

II　量子力学的自由粒子

3 次元空間中の質量 m の自由粒子に対する Schrödinger 方程式を考え、その固有値方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z) \tag{6}$$

を考える。

(1) 一辺の長さ L の立方体に閉じ込められているとして固定端境界条件 (箱の壁面上で $\psi(x,y,z)=0$) を課す。このとき変数分離を行いエネルギー固有値 E を求めよ。

(2) 体積 L^3 は十分大きいとして、エネルギー ε 以下の固有値 E を持つ固有状態の個数を求めよ。