2026年度 物理工学基礎演習 (統計力学第一)
第1回 問題

担当; 水田 郁 (工学部 9 号館 325 号室)
提出日; 5/11 13:00 (前半クラス), 5/7 13:00 (後半クラス)

I　確率論

確率 $1-p,\, p$ で $0, 1$ を取る N 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ に対して、その平均

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{1}$$

を考える。

(1) $n = 0, 1, \ldots, N$ に対して、確率変数 $\bar{X}_N$ が n/N を取る確率 $\mathrm{Prob}[\bar{X}_N = n/N]$ を求めよ。

(2) 確率変数 X の期待値 $\langle X \rangle$ を $\langle X \rangle = \sum_x x\mathrm{Prob}[X = x]$ によって定める。このとき、確率変数 $\bar{X}_N$ について期待値 $\mu = \langle \bar{X}_N \rangle$ と分散 $\sigma^2 = \langle (\bar{X}_N - \mu)^2 \rangle$ を計算せよ。

(3) 非負の値を取る任意の離散確率変数 X に対して、$a > 0$ ならば

$$\mathrm{Prob}\left[X \geq a\right] \leq \frac{\langle X \rangle}{a} \qquad \text{(Markov の不等式)} \tag{2}$$

が成立することを示せ。またこの結果を用いて、任意の正の実数 $t > 0$ に対して $a > \mu$ のとき

$$\mathrm{Prob}\left[\bar{X}_N \geq a\right] \leq \frac{\langle e^{tN\bar{X}_N} \rangle}{e^{tNa}} \tag{3}$$

が成立することを示せ。

(4) $a > \mu$ とする。(3) 式の右辺に現れる関数

$$f(t) = \frac{\langle e^{tN\bar{X}_N} \rangle}{e^{tNa}} \tag{4}$$

を計算し、p, N, a, t を用いて表せ。

(5) 簡単のために $p = 1/2$ とする[1]。(3), (4) の結果を用いて

$$\mathrm{Prob}\left[\bar{X}_N \geq a\right] \leq e^{-N(\log 2 - h(a))}, \quad h(a) = -a\log a - (1-a)\log(1-a) \tag{5}$$

を満たすことを示せ。またこのことから a が $1/2 < a \leq 1$ を満たす定数であるとき、$\mathrm{Prob}\left[\bar{X}_N \geq a\right]$ が確率変数の個数 N に関してどのように振る舞うか議論せよ。

[1]一般の $0 < p < 1$ で計算しても良い。その場合は $\mathrm{Prob}\left[\bar{X}_N \geq a\right] \leq e^{-Nd(a,p)}$ の形にかけることを示し、関数 $d(a, p)$ を求めよ。

II　量子調和振動子

$\hat{q}, \hat{p}$ を正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす位置演算子, 運動量演算子として

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \tag{6}$$

で与えられる量子一次元調和振動子系の Hamiltonian を考える。

(1) Heisenberg 描像での位置演算子, 運動量演算子はそれぞれ $\hat{q}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{q}e^{-i\hat{H}t/\hbar}$, $\hat{p}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{p}e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ である。Heisenberg 方程式

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{q}(t) = [\hat{q}(t), \hat{H}], \\ i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{p}(t) = [\hat{p}(t), \hat{H}] \end{cases} \tag{7}$$

を $\hat{q}(t)$, $\hat{p}(t)$ を用いて書き下せ。また、これを解くことで初期状態 $|\psi\rangle$ としたときの位置, 運動量の期待値 $\langle\psi|\hat{q}(t)|\psi\rangle$, $\langle\psi|\hat{p}(t)|\psi\rangle$ の時間変化が古典調和振動子と一致することを示せ。

(2) 消滅演算子 $\hat{a}$, 生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \tag{8}$$

で定義する。このとき、$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を計算せよ。また Hamiltonian $\hat{H}$ を $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。

(3) 数演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態を $|n\rangle$ とおく。固有値 n が非負の整数であることを示し、Hamiltonian $\hat{H}$ の固有値を求めよ。また、規格化因子 c_n を用いて $|n\rangle = c_n(\hat{a}^\dagger)^n\,|0\rangle$ で与えられることを示せ。